数理解析研究所講究録
221巻 1974年 17-27

Foliated principal GL_r-bundles の特性類

北大 理学部 鈴木 治夫

1. Mをparacompact Hausdorff 微分可能なn次元多様体とし，$\mathcal{F}$をMの上の微分可能なcodimension qのfoliationとする。Mに Lie 群が作用し，orbitsの次元が同一$(n-q)$ならば，Mのcodimension qのfoliationが定まる。この意味で，foliationは変換群の理論と関連をもつ。Foliation $\mathcal{F}$をもつ多様体Mを$(M, \mathcal{F})$と表わすことにする。$(M, \mathcal{F})$上のfoliated principal GL_r-bundle $E(M, p, GL_r)$は，微分可能principal GL_r-bundle $p: E \to M$で，Eはright GL_r-invariantな微分可能foliation $\mathcal{F}_E$をもち，その各leafは$\mathcal{F}$のleafのpに関する被覆となるものとする。$\mathcal{F}_E$を$\mathcal{F}$のlifted foliationという。本論の目的は，$(M, \mathcal{F})$上のfoliated principal GL_r-bundle $E(M, p, GL_r)$のBott特性類の構成と，$E(M, p, GL_r)$がtransversal projectable connectionをもつとき，そのvanishing theoremを得ることである。P. Molino [3] はfoliationのnormal bundleのframe bundleがtransversal projectable connectionをもつ場合を扱っ

ているが，M が codimensions q, r の foliations $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ をもち，$\mathcal{F}$ の tangent bundle F が $\mathcal{F}'$ の tangent bundle F' の subbundle になっている場合には，$(M, \mathcal{F})$ の上の foliated principal GL_r-bundle $E(M, p, GL_r)$ が構成され，これに Bott 特性類の vanishing の議論が適用される。

2. $(M, \mathcal{F})$ の上の $E(M, p, GL_r)$ の接続は，$\mathcal{F}_E$ の leaf がその接続に関して *horizontal* であれば <u>*transversal*</u> といわれる。gl_r を GL_r の Lie algebra，$I(gl_r)$ を gl_r の invariant polynomials の algebra とする。また ∇' を $E(M, p, GL_r)$ の transversal connection とする。$E(M, p, GL_r)$ が transversal connection をもつことは，容易にみられる。

補題2.1. K' を ∇' の M 上の曲率形式とし，$\varphi_i \in I(gl_r)$, $\deg \varphi_i = i$ とするとき，$i > q$ に対して，$\varphi_i(K') = 0$ となる。

証明 $K'^{\alpha} = (K'^{\alpha}_{ij})$ を $E(M, p, GL_r)$ の座標近傍 U_α の上の K' の表示とする。K' は $\mathcal{F}$ の leaves に沿って 0 だから，$I_\alpha(F)$ を $F|U_\alpha$ の定義イデアルとするとき，$K'^{\alpha}_{ij} \in I_\alpha(F)$ となる。ゆえに $i > q$ に対して，$\varphi_i(K'^{\alpha}) \in I_\alpha(F)^{q+1} = \{0\}$ となる。証明終

$\mathcal{F}$ の leaf を L で表わす。R を実数直線とするとき，$\mathcal{F} \times R = \{L \times R \mid L \in \mathcal{F}\}$ は $M \times R$ の上の codimension q の微分可能 foliation となる。写像 $p \times id : E \times R \to M \times R$ は $(M \times R, \mathcal{F} \times R)$

の上の foliated principal GL_r-bundle $E(M\times R, p\times id, GL_r)$ を定める。
その lifted foliation は $(\mathcal{F}\times R)_E = \mathcal{F}_E\times R$ である。 ∇, $\bar{\nabla}$ を
$E(M, p, GL_r)$ の接続で, θ, $\bar{\theta}$ をその接続形式とする。
$E(M\times R, p\times id, GL_r)$ の上の gl_r-valued 1-form $\tilde{\theta}$ を,

$$\tilde{\theta}(\partial/\partial t) = 0 \qquad (t \text{ は } R \text{ の座標}),$$

$$\tilde{\theta}(X) = (1-t)\theta(X) + t\bar{\theta}(X) \qquad X \in T_{(e,t)}(E\times\{t\}) = T_e(E)\times\{t\},$$

によって定める。 $\tilde{\theta}$ は $E(M\times R, p\times id, GL_r)$ の上の horizontal space field を定めるから, その上の接続 $\tilde{\nabla}$ を定める。 これを
$\tilde{\nabla} = (1-t)\nabla + t\bar{\nabla}$ とかく。

一般に, 微分可能な principal bundle の接続の曲率形式 Ω は閉形式だから, 任意の $\varphi_i \in I(gl_r)$ に対して $d(\varphi_i(\Omega)) = 0$ となる。
$\bar{\nabla}$ の M 上の曲率形式を $\bar{\Omega}$ とかくとき, de Rham cohomology の微分可能ホモトピー不変性によって,

$$[\varphi_i(\Omega)] = [\varphi_i(\bar{\Omega})] \in H^{2i}_{DR}(M)$$

となる。 $[\varphi_i(\Omega)]$ は φ_i に対する <u>Pontrjagin 特性類</u>と呼ばれるものである。

補題 2.1 から, 次の Bott vanishing theorem の一般化が得られる。

系 2.2. (P. Molino [2]) $(M, \mathcal{F})$ の上の $E(M, p, GL_r)$ の Pontrjagin 特性類は, $2\cdot\mathrm{codim}.\mathcal{F}$ より大きい次元に対して 0 となる。

次にfoliationの特性類を構成するための準備の補題を述べておく。

補題2．3．　∇^1，$\bar{\nabla}^1$を，$(M,\mathcal{F})$の上の$E(M,p,GL_r)$のtransversal connectionsとするとき，$\hat{\nabla}^1=(1-t)\nabla^1+t\bar{\nabla}^1$は，$(M\times R,\mathcal{F}\times R)$の上の$E(M\times R,p\times id,GL_r)$のtransversal connectionとなる。

証明は，接続$\hat{\nabla}^1$の定義から容易に得られる。

補題2．4．　実数上の$r\times r$行列Aに対して，*invariant homogeneous polynomials* c_iを

$$\det(I+tA)=1+\sum_{i=1}^{r}t^i c_i(A)$$

によって定義すれば，

$$I(gl_r)=R[c_1,c_2,\dots,c_r]$$

となる。

証明は *R. Bott* [1, *Appendix A*] 参照．

∇^0を*principal bundle* $E(M,p,GL_r)$上のリーマン接続とし，k^0を∇^0のM上の曲率形式とする。　$A_C^*(M)$をM上の複素数係数の微分形式の*algebra*とし，準同形$\lambda(\nabla^0)$，$\lambda(\nabla^0,\nabla^1)$：
$I(gl_r)\to A_C^*(M)$を，

$$\lambda(\nabla^i)(\varphi_j)=\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\right)^j\varphi_j(k^i)\qquad i=0,\ 1,$$

$$\lambda(\nabla^0,\nabla^1)(\varphi_j)=\hat{p}_*(\lambda(\nabla^{0,1})(\varphi_j)\,|\,M\times I),$$

$\hat{p}_*$：　$A_C^*(M\times I)\to A_C^*(M)$は*trivial bundle* $\hat{p}$：

$M \times I \to M$ に関する integration along the fibre,

$$\nabla^{0,1} = (1-t)\nabla^0 + t\nabla^1 \qquad (t \in R)$$

と定義する。 R. Bott [1] と同じ計算方法によって,

$$\lambda(\nabla^0)(c_{2i-1}) = 0 \qquad 1 \leqq 2i-1 \leqq r,$$

$$d\{\lambda(\nabla^0; \nabla^1)(c_{2i-1})\} = \lambda(\nabla^1)(c_{2i-1})$$

が得られる。 他方, 補題2.1によって, $\lambda(\nabla^1)$: $R[c_1, \cdots, c_r] \to A_C^*(M)$ は, q より大きい次数の元を0に写すから, differential algebra $WO_{q,r}$ を,

$$R[c_1, \cdots, c_s]/(\deg > q) \otimes \Lambda(h_1, h_3, \cdots, h_l)$$

$$s = \min(q, r), \quad l = \max\{2m+1 \leqq r\},$$

$$d(c_i) = 0, \quad d(h_i) = c_i \qquad 1 \leqq i \leqq s,$$

$$d(h_i) = 0 \qquad i > s$$

によって定めるとき, R-algebra homomorphism λ_E : $WO_{q,r} \to A_C^*(M)$ が,

$$\lambda_E(c_i) = \lambda(\nabla^1)(c_i) \qquad 1 \leqq i \leqq s,$$

$$\lambda_E(h_i) = \lambda(\nabla^0; \nabla^1)(c_i) \qquad i = 1, 3, \cdots, l$$

によって定義される。 上に述べた $\lambda(\nabla^0; \nabla^1)$ の性質から, λ_E は cochain map で, R-algebra homomorphism λ_E^* : $H^*(WO_{q,r}) \to H_{DR}^*(M; C)$ を引きおこす。

命題2. 5. λ_E^* は, $(M, \mathcal{F})$ 上の foliated principal GL_r-bundle $E(M, p, GL_r)$ によって定まり, ∇^0, ∇^1 のとり方によらない。

証明　∇^1, $\bar{\nabla}^1$を$(M, \mathfrak{F})$上の$E(M, p, GL_r)$の transversal connections とするとき，補題2. 3 によって，$\tilde{\nabla}^1=(1-t)\nabla^1+t\bar{\nabla}^1$ $(t\in R)$もまた$(M\times R, \mathfrak{F}\times R)$の上の foliated principal GL_r- bundle $E(M\times R, p\times id, GL_r)$の transversal connection となる。　他方二つのリーマン接続は，リーマン接続を通して微分可能ホモトープとなる。　ゆえに，de Rham cohomology の微分可能ホモトピー不変性により結論が得られる。　証明終

$Im(\lambda^*_E)$の元を，$(M, \mathfrak{F})$の上の$E(M, p, GL_r)$の <u>Bott の特性類</u>と呼ぶことにする。

3.　$(M, \mathfrak{F})$上の foliated principal GL_r-bundle $E(M, p, GL_r)$の transversal connection は，局所的に$\mathfrak{F}$に transversal なMの submanifold 上の，$E(M, p, GL_r)$の restriction の接続の，$\mathfrak{F}$の leaves に沿って定まるMの local projection に関する逆像となるとき，<u>projectable</u> と呼ばれる。　∇^ωを$(M, \mathfrak{F})$の上の foliated principal GL_r-bundle $E(M, p, GL_r)$の transversal projectable connection (C. T. P.) とする。　前節の Bottの特性類の構成において，∇^1として∇^ωを用いるとき，∇^ωは局所的にq次元多様体上の接続から引きおこされた接続であるから，$\lambda(\nabla^\omega)$: $R[c_1, \cdots, c_r]\to A^*_C(M)$ は，次数が$[q/2]$より大きい元をすべて0に写す。　したがって，differential algebra $WO'_{\frac{q}{2}, r}$ を，

$$R[c_1, \cdots, c_{s'}]/(\deg > \tfrac{q}{2}) \otimes \Lambda(h_1, h_3, \cdots, h_l)$$

$$s' = \min([q/2], r), \quad l = \max\{2m+1 \leqq r\}$$

$$d(c_i) = 0, \quad d(h_i) = c_i \qquad 1 \leqq i \leqq s'$$

$$d(h_i) = 0 \qquad i > s'$$

によって定めるとき，R-algebra homomorphism λ_E : $WO'_{\frac{q}{2},r} \to A^*_C(M)$ が，

$$\lambda'_E(c_i) = \lambda(\nabla^1)(c_i) \qquad 1 \leqq i \leqq s'$$

$$\lambda'_E(h_i) = \lambda(\nabla^0, \nabla^1)(c_i) \qquad i = 1, 3, \cdots, l$$

によって定義され，R-algebra homomorphism $(\lambda'_E)^*$: $H^*(WO'_{\frac{q}{2},r}) \to H^*_{DR}(M; C)$ を引きおこす。

$WO'_{\frac{q}{2},r}$ の cocycles は，

$$c_{i_1} \cdots c_{i_\lambda} \otimes 1,$$

$$c_{i_1} \cdots c_{i_\lambda} \otimes h_{j_1} \wedge \cdots \wedge h_{j_\mu} \quad 2\Big(\sum_{\alpha=1}^{\lambda} i_\alpha + \min\{j_\beta \mid 1 \leqq \beta \leqq \mu\}\Big) > q,$$

の1次結合であることに注意しておく。

命題3．1． Cohomology class

$$(\lambda'_E)^*[c_{i_1} \cdots c_{i_\lambda} \otimes h_{j_1} \wedge \cdots \wedge h_{j_\mu}]$$

は，$2(\sum_{\alpha=1}^{\lambda} i_\alpha + \min\{j_\beta \mid 1 \leqq \beta \leqq \mu\}) \neq q+1$ ならば，∇^ω, ∇^0 のとり方によらない。 とくに q が偶数ならば，$(\lambda'_E)^*$ は ∇^ω, ∇^0 のとり方によらない。

証明 ∇^ω, $\bar{\nabla}^\omega$ を $(M, \mathcal{F})$ の上の foliated principal GL_r-bundle $E(M, p, GL_r)$ の transversal projectable connections で，$\mathcal{F}$ に関する

transversal submanifolds N, $\bar{N}$ の上の，$E(M, p, GL_r)$ の restrictions の接続の，$\mathfrak{F}$ の leaves に沿って定まる M の local projections による逆像になっているとする。 N, $\bar{N}$ の間に，明らかに，自然な局所微分位相同形があり，∇^{ω}, $\bar{\nabla}^{\omega}$ は $E(M, p, GL_r)$ の，$\mathfrak{F}$ に関する同一 transversal submanifold N の上における restriction の接続の，$\mathfrak{F}$ の leaves に沿って定まる M の local projection による逆像としてよい。 接続 $\tilde{\nabla}^{\omega} = (1-t)\nabla^{\omega} + t\bar{\nabla}^{\omega}$ $(t \in R)$ は，$(M \times R, \mathfrak{F} \times R)$ の上の foliated principal GL_r-bundle $E(M \times R, p \times id, GL_r)$ の上の，transversal connection であり，また，$E(M \times R, p \times id, GL_r)$ の，$M \times R$ の codimension $q+1$ の foliation $\{\mathfrak{F} \times \{t\}\}$ 上の foliated principal GL_r-bundle の構造に対して，$\tilde{\nabla}^{\omega}$ は transversal projectable connection となる。 したがって，$\tilde{\nabla}^{\omega}$ を用いて定められる cochain map λ'_E : $WO'_{\frac{q}{2}, r} \to A^*_c(M)$ に対して，$2(\sum_{\alpha=1}^{\lambda} i_\alpha + \min\{j_\beta \mid 1 \leqq \beta \leqq \mu\}) > q+1$ ならば，

$$d(\lambda'_E(c_{i_1} \cdots c_{i_\lambda} \otimes h_{j_1} \wedge \cdots \wedge h_{j_\mu})) = 0$$

となる。 他方二つのリーマン接続は，リーマン接続を通して互に微分可能ホモトープとなる。 ゆえに de Rham cohomology の微分可能ホモトピー不変性によって結論が得られる。 証明終

定理 3.2. $(M, \mathfrak{F})$ 上の foliated principal GL_r-bundle

$E(M, p, GL_r)$ が transversal projectable connection ∇^{ω} をもつとする。 τ : $WO_{q,r} \to WO'_{\frac{q}{2},r}$ を natural projection による cochain map とし，その induced cohomology homomorphism を τ^* とかくとき，

$$\begin{array}{ccc} H^*(WO_{q,r}) & & \\ \downarrow \tau^* & \searrow \lambda_E^* & \\ H^*(WO'_{\frac{q}{2},r}) & \xrightarrow{(\lambda'_E)^*} & H^*_{DR}(M; C) \end{array}$$

は可換となる。

証明　$z \in WO_{q,r}$ で $dz = 0$ ならば，$d\tau z = \tau dz = 0$．
λ_E^{ω} : $WO_{q,r} \to A_C^*(M)$ を ∇^{ω}，∇^0 によって定められる cochain map とするとき，$\lambda'_E(\tau z) = \lambda_E^{\omega}(z)$ となる。 他方，∇^{ω} は transversal connection だから，$[\lambda_E^{\omega}(z)] = \lambda_E^*[z]$。

証明終

$Im(\lambda'_E)^*$ の元を $(M, \mathcal{F})$ の上の foliated principal GL_r-bundle $E(M, p, GL_r)$ の，transversal projectable connection に関する Molino の特性類と呼ぶことにする。

定理 3. 2 によって，$(M, \mathcal{F})$ 上の $E(M, p, GL_r)$ が transversal projectable connection をもつとき，いくつかの Bott の特性類は 0 となる。

系　3. 3.　定理 3. 2 の条件の下で，

$$\gamma = c_{i_1} \cdots c_{i_\lambda} \otimes h_{j_1} \wedge \cdots \wedge h_{j_\mu}$$

$$1 \leqq i_1, \cdots, i_\lambda \leqq \min(q, r) = s$$
$$1 \leqq j_1, \cdots, j_\mu \leqq r$$
$$\sum_{\alpha=1}^{\lambda} i_\alpha + \min\{j_\beta \mid 1 \leqq \beta \leqq \mu\} > q$$

とするとき，$2(\sum_{\alpha=1}^{\lambda} i_\alpha) > q$ ならば，$\lambda_E^*[\gamma] = 0$．

M を paracompact Hausdorff 微分可能多様体とし，$\mathcal{F}$ および $\mathcal{F}'$ を codimensions がそれぞれ q，r の，M の上の微分可能 foliations とする。 F，F' を $\mathcal{F}$，$\mathcal{F}'$ の tangent bundles で，F が F' の subbundle であるとする。 $Q = T(M)/F'$ の frame bundle $E_T(M, p_T, GL_r)$ は $(M, \mathcal{F})$ の上の foliated principal GL_r-bundle となることがわかっている。 これに系3．3を適用して，次のような結論を得る。

系 3．4．$(M, \mathcal{F})$ の上の foliated principal GL_r-bundle $E_T(M, p_T, GL_r)$ の Bott の特性類の準同形を λ_E^*：$H^*(WO_{q,r}) \longrightarrow H_{DR}^*(M; C)$ とする。 $(M, \mathcal{F})$ の上の $E_T(M, p_T, GL_r)$ が transversal projectable connection をもつならば，特性類

$$\lambda_E^*[c_{i_1} \cdots c_{i_\lambda} \otimes h_{j_1} \wedge \cdots \wedge h_{j_\mu}]$$
$$1 \leqq i_1, \cdots, i_\lambda \leqq \min(q, r) = s$$
$$1 \leqq j_1, \cdots, j_\mu \leqq r$$
$$\sum_{\alpha=1}^{\lambda} i_\alpha + \min\{j_\beta \mid 1 \leqq \beta \leqq \mu\} > q$$

は，$2(\sum_{\alpha=1}^{\lambda} i_\alpha) > q$ ならば，0 となる。

注意，系3．4において，$\mathcal{F} = \mathcal{F}'$ としてみれば，M の

foliation $\mathcal{F}$ が transversal projectable connection を許容する(すなわち，$(M, \mathcal{F})$ の上の foliated principal GL_r-bundle $E_T(M, p_T, GL_r)$ が transversal projectable connection をもつ)ならば，$\mathcal{F}$ の Godbillon-Vey class $\lambda_E^*(c_1^q \otimes h_1)$ は 0 となることが示されている。

文　献

[1] R. Bott, Lectures on characteristic classes and foliations, Lecture Notes in Mathematics, 279, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972, 1-76.

[2] P. Molino, Classes caracteristiques et obstruction d'Atiyah pour les fibrés principaux feuilletés, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B 272 (1971), A1376-A1378.

[3] ————, Propriétés cohomologiques et propriétés topologiques des feuilletages à connexion transverse projectable, Topology 12 (1973), 317-325.